10. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

План:
1. Неопределенный интеграл
2. Методы интегрирования
3. Определенный интеграл

Ключевые слова и словосочетания

Первообразная, неопределенный интеграл, операция интегрирования, формула интегрирования подстановкой, подстановка Эйлера, формула интегрирования по частям, интегрирование рациональных, иррациональных, тригонометрических и гиперболических функций.

Метод неопределенных коэффициентов, простейшие дроби, дроби 4-го рода, дроби 2-го рода, универсальная подстановка.

Криволинейная трапеция, разбиение отрезка, нижняя и верхняя суммой Дарбу, интегрируемая функция, определенный интеграл, классы интегрируемых функций, формула Ньютона – Лейбница, интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле.

Ранее нами была рассмотрена задача о нахождении мгновенной скорости материальной точки по заданному закону ее движения. Если $S = S(t)$ - путь, пройденный точкой за время t от начала движения, то мгновенная скорость и в момент t равна производной функции $S(t)$, т. е.

$$v = S'(t).$$

В физике встречается обратная задача: по заданной скорости $v = S'(t)$ найти закон движения, т.е. найти такую функцию $S(t)$, производная которой равна $v(t)$.

1.1. Первообразная

Пусть функции $f(x)$ и $F(x)$ определены на интервале $(a,\ b)$. Если функция $F(x)$ имеет производную на интервале $(a,\ b)$ и если для всех $x \in (a,\ b)$ выполняется равенство

$$F'(x) = f(x), \tag{1}$$

то функция $F(x)$ называется **первообразной для функции** $f(x)$ на интервале $(a,\ b)$.

Замечание. Понятие первообразной можно ввести и для других промежутков (полуинтервала - конечного или бесконечного, отрезка).

Дадим определение первообразной на отрезке.

Если функции $f(x)$ и $F(x)$ определены на отрезке $[a,\ b]$, причем функция F дифференцируема на интервале $(a,\ b)$, непрерывна на отрезке $[a,\ b]$ и для всех $x \in (a,\ b)$ выполняется равенство (1), то функцию $F(x)$ назовем первообразной для функции $f(x)$ на отрезке $[a,\ b]$.

Замечание. Если $F(x)$- первообразная для функции $f(x)$ на интервале $(a,\ b)$, то функция $F(x)+C$ при любом значении $C = const$ также является первообразной для $f(x)$.

Справедливо и обратное утверждение.

Теорема. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - две первообразные для функции $f(x)$ на интервале $(a,\ b)$, то для всех $x \in (a,\ b)$ выполняется равенство

$$F_2(x) = F_1(x) + C, \tag{2}$$

где C - постоянная.

Доказательство. Обозначим $\Phi(x) = F_2(x) - F_1(x)$. По определению первообразной и в силу условий теоремы для всех $x \in (a,\ b)$ выполняются равенства

$$F_2'(x) = f(x), \qquad F_1'(x) = f(x),$$

откуда следует, что функция $\Phi(x)$ дифференцируема на интервале $(a,\ b)$ и для всех $x \in (a,\ b)$ имеет место равенство

$$\Phi'(x) = 0$$

Согласно следствию из теоремы Лагранжа, $\Phi(x) = C = const ==$ const для всех $x \in (a,\ b)$ или $F_2(x) - F_1(x) = C$, т.е. справедливо равенство (2). ■

Таким образом, для данной функции $f(x)$ ее первообразная $F(x)$ определяется неоднозначно, с точностью до постоянной. Для того чтобы из совокупности первообразных выделить какую-либо первообразную $F_1(x)$, достаточно указать точку $M_0(x_0, y_0)$, принадлежащую графику функции $y = F_1(x)$.

Пример 1. Для функции $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, найти такую первообразную $F_1(x)$, график которой проходит через точку $M_0(1,\ 2)$.

Решение

Совокупность всех первообразных функции $\dfrac{1}{x^2}$ описывается формулой

$$F(x) = -\frac{1}{x} + C.$$

По условию $F_1(1) = 2$, т.е. $2 = -1 + C$, откуда $C = 3$. Следовательно,

$$F_1(x) = 3 - \frac{1}{x}. \ ▲$$

Упражнения

1. Найти какую-либо первообразную $F(x)$ функции $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x \in (0, \infty)$.►

2. Для функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in (-\infty, 0)$, первообразную $F(x)$, график которой проходит через точку $M_0(-2; 2)$.►

Замечание. В дальнейшем будет доказано, что первообразная существует для любой функции, непрерывной на отрезке (или интервале).

1.2. Понятие неопределенного интеграла

Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на некотором промежутке Δ называют **неопределенным интегралом от функции** f на этом промежутке, обозначают символом $\int f(x)dx$ и пишут

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \qquad (3)$$

Здесь $F(x)$- какая-нибудь первообразная функции $f(x)$ на промежутке Δ, C- произвольная постоянная. Знак $\int$ называют знаком интеграла, f- подынтегральной функцией, $f(x)dx$ - подынтегральным выражением.

Подынтегральное выражение можно записать в виде $F'(x)dx$ или $dF(x)$, т. е.

$$f(x)dx = dF(x). \qquad (4)$$

Операцию нахождения неопределенного интеграла от данной функции, которая является обратной операции дифференцирования, называют **интегрированием.**

Поэтому любую формулу для производной, т.е. формулу вида $F'(x) = f(x)$ можно записать в виде (3). Используя таблицу производных, можно найти интегралы от некоторых элементарных функций. Например, из равенства $(\sin \boldsymbol{x})' = \cos \boldsymbol{x}$ следует, что

$$\int \cos x dx = \sin x + C.$$

1.3. Свойства неопределенного интеграла

Свойство 1.

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx. \qquad (5)$$

Доказательство. Из равенства (3) следует, что

$$d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x) + C) = dF(x),$$

так как $dC = 0$.

Согласно формуле (5) знаки дифференциала и интеграла взаимно уничтожаются, если знак дифференциала стоит перед знаком интеграла. ■

Свойство 2.

$$\int dF(x) = F(x) + C. \qquad (6)$$

Доказательство. Равенство (6) следует из равенств (3) и (4).

Соотношение (6) показывает, что и в случае, когда знак интеграла стоит перед знаком дифференциала, эти знаки также взаимно уничтожаются (если отбросить постоянную C). ■

Свойство 3. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют на некотором промежутке первообразные, то для любых $\alpha \in R^1$, $\beta \in R^1$ таких, что $\alpha\beta \neq 0$, функция $\varphi(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ также имеет первообразную на этом промежутке, причем

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx. \qquad (7)$$

Доказательство. Пусть F и G - первообразные для функций f и g соответственно, тогда $\Phi = \alpha F + \beta G$ - первообразная для функции φ, так как

$$(\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha f(x) + \beta g(x) = \varphi(x).$$

Согласно определению интеграла левая часть (7) состоит из функций вида $\Phi(x) + C$, а правая часть - из функций вида

$$\alpha F(x) + \alpha C_1 + \beta G(x) + \beta C_2 = \Phi(x) + \alpha C_1 + \beta C_2.$$

Так как $\alpha\beta \neq 0$, то каждая функция вида $\Phi(x) + C$ принадлежит совокупности функций $\Phi(x) + \alpha C_1 + \beta C_2$ и наоборот, т. е. по заданному числу $\boldsymbol{C}$ можно найти $\boldsymbol{C}_1$ и $\boldsymbol{C}_2$, а по заданным C_1 и C_2 - число C такое, чтобы выполнялось равенство $C = \alpha C_1 + \beta C_2$.

Таким образом, интегрирование обладает свойством линейности: интеграл от линейной комбинации функции равен соответствующей линейной комбинации интегралов от рассматриваемых функций.■

Пример 2. Найти $\int f(x)dx$, если:

$a)\quad f(x) = e^x + x^2;\qquad b)\quad f(x) = -2\sin x + \dfrac{3}{1+x^2}.$

Решение

a) Используя таблицу производных и свойство 3 интеграла, получаем

$$\int (e^x + x^2)dx = e^x + \frac{x^3}{3} + C.$$

b) Так как $(-\cos x)' = \sin x$, $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$, то

$$\int \left(-2\sin x + \frac{3}{1+x^2} \right) dx = 2\cos x + 3arctgx + C. \ \blacktriangle$$

Упражнение

Найти интеграл:

$a)$ $\int \left(x - 2e^x \right) dx$; $b)$ $\int \frac{\left(\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x} \right)^2}{x} dx$; $c)$ $\int \frac{dx}{x^4 + 4x^2}$;

$d)$ $\int \frac{\sqrt{x^2-3} - 3\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^4-9}} dx$; $e)$ $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$; e) $f)$ $\int tg^2 x dx$;

$g)$ $\int 3^x \cdot 5^{2x} dx$. ►

Дальнейшее расширение множества функций, интегралы от которых выражаются через элементарные функции, можно получить, если воспользоваться правилом дифференцирования сложной функции и правилом дифференцирования произведения двух функций.

1.4. Метод замены переменного (метод подстановки)

Пусть функция $t = \varphi(x)$ определена и дифференцируема на промежутке Δ и пусть $\widetilde{\Delta} = \varphi(\Delta)$ - множество значений функции φ на Δ.

Если функция $U(t)$ определена и дифференцируема на $\widetilde{\Delta}$, причем

$$U'(t) = u(t), \tag{8}$$

то на промежутке Δ определена и дифференцируема сложная функция $F(x) = U(\varphi(x))$ и

$$F(x) = \left(U(\varphi(x)) \right)' = U'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = u(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x). \tag{9}$$

Из равенств (8) и (9) следует, что если $U(t)$ - первообразная для функции $u(t)$, то $U(\varphi(x))$- первообразная для функции и $u(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$. Это означает, что если

$$\int u(t)dt = U(t) + C. \tag{10}$$

то

$$\int u(\varphi(x))\varphi'(x)dx = U(\varphi(x)) + C. \tag{11}$$

или

$$\int u(\varphi(x))d\varphi(x) = U(\varphi(x)) + C. \tag{12}$$

Формулу (12) (или формулу (11)) называют формулой **интегрирования заменой переменного.**

Она получается из формулы (10), если вместо t подставить дифференцируемую функцию $\varphi(x)$.

Замечание. Формула (12) дает возможность найти интеграл $\int f(x)dx$, если функция $\boldsymbol{f(x)}$ представляется в виде $\boldsymbol{f(x) = u(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)}$ и если известна первообразная функции и $\boldsymbol{u(t)}$, т. е. известен интеграл (10).

Отметим важные частные случаи формулы (12).

а) Пусть $\boldsymbol{F(x)}$ - первообразная функции $\boldsymbol{f(x)}$, т. е.

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Тогда

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, \quad a \neq 0. \tag{13}$$

б) Используя равенство

$$\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C$$

получаем

$$\int \frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)} = \int \frac{\varphi'(x)dx}{\varphi(x)} = \ln|\varphi(x)| + C, \text{ если } \varphi(x) \neq 0. \tag{14}$$

в) Так как

$$\int t^{\alpha} dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \qquad \alpha \neq -1, \quad t > 0.$$

то

$$\int (\varphi(x))^{\alpha} \varphi'(x) dx = \int (\varphi(x))^{\alpha} d\varphi(x) = \frac{(\varphi(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \qquad \alpha \neq -1, \quad t > 0. \qquad (15)$$

Приведем примеры применения формул (13) – (15).

Примеры

3. $\int (2x+3)^6 dx = \int (2x+3)^6 d(2x+3) = \frac{(2x+3)^7}{14} + C$. ▲

4. $\int \frac{dx}{(x+a)^k} = \begin{cases} \ln|x+a| + C, & k = 1, \\ \frac{(x+a)^{-k+1}}{1-k} + C, & k \neq 1. \end{cases}$ ▲

5. $\int \frac{xdx}{x^2+a} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+a)}{x^2+a} = \frac{1}{2}\ln|x^2+a| + C$. ▲

6. $\int ctgxdx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \frac{1}{2}\ln|\sin x| + C$. ▲

7. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+a}} = \int \frac{d(x^2+a)}{2(x^2+a)} = \sqrt{x^2+a} + C$. ▲

8. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a} arctg\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad a > 0$. ▲

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad a > 0$. ▲

10. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \int \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad a \neq 0$. ▲

11. $J = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}, \quad a \neq 0$. ▲

Решение. Пусть $x + \sqrt{x^2+a} = t = t(x)$, тогда

$$dt = t'(x)dx = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+a}}\right)dx = \frac{t(x)}{\sqrt{x^2+a}}dx,$$

откуда

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\frac{dt(x)}{t(x)}.$$

Поэтому

$$J=\int\frac{dt(x)}{t(x)}=\ln|t(x)|+C=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C,$$

т.е.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C. \ ▲$$

Замечание. При вычислении этого интеграла использована **подстановка Эйлера** $x+\sqrt{x^2+a}=t$.

Замечание. Интегралы, рассмотренные в примерах 8-11,часто применяются. Эти интегралы обычно считают табличными.

Приведем таблицу интегралов, полученную из соответствующей таблицы производных. Сюда включены интегралы, найденные в примерах 8-11.

1) $\int x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ \ a\neq -1.$

2) $\int\frac{dx}{x+a}=\ln|x+a|+C.$

3) $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C,\ \ a>0,\ \ a\neq -1,\qquad \int e^x dx=e^x+C.$

4) $\int\sin x dx=-\cos x+C.$

5) $\int\cos x dx=\sin x+C.$

6) $\int\frac{dx}{\cos^2 x}=tgx+C.$

7) $\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-ctgx+C.$

9) $\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\left(\frac{x}{a}\right)+C,\ \ a>0.$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad a > 0.$

11) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad a \neq 0.$

12) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C, \quad a \neq 0.$

Примеры

12. $J = \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$

Решение

Так как

$$x(1-x) = -(x^2 - x) = \frac{1}{4} - \left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2,$$

то, используя пример 9 при $a = \frac{1}{2}$, получаем

$$J = \int \frac{d\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} = \arcsin\left(\frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right) + C = \arcsin(2x-1) + C.$$

т.е.

$$J = \arcsin(2x-1) + C. \ \blacktriangle$$

13. $J = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 3x + 5}}.$

Решение

Так как

$$x^2 - 3x + 5 = \left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{4}\right) + 5 - \frac{9}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4},$$

то, используя пример 11, получаем

$$J=\int\frac{d\left(x-\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}}}=\ln\left|x-\frac{3}{2}+\sqrt{x^2-3x+5}\right|+C. \ \blacktriangle$$

Иногда бывает целесообразно при вычислении интеграла

$$J=\int f(x)dx \tag{16}$$

Перейти к новой переменной.

Пусть $x=\varphi(t)$ - строго монотонная и дифференцируемая на некотором промежутке функция. Тогда она имеет обратную функцию

$$t=\omega(x). \tag{17}$$

Преобразуя подынтегральное выражение в интеграле (16) с помощью подстановки $x=\varphi(t)$, получаем $f(x)dx=f(\varphi(t))\varphi'(x)dt$. Обозначим $u(t)=f(\varphi(t))\varphi'(x)$, тогда

$$f(x)dx=u(t)dt. \tag{18}$$

Пусть $U(t)$ - первообразная для функции $\boldsymbol{u(t)}$ тогда

$$\int u(t)dt=U(t)+C. \tag{19}$$

Из равенств (16) - (19) находим

$$J=\int f(x)dx=\int u(t)dt=U(t)+C=U(\omega(x))+C. \tag{20}$$

Формулу (20) называют **формулой интегрирования подстановкой.**

Согласно этой формуле для вычисления интеграла (16) достаточно подобрать такую обратимую дифференцируемую функцию $x=\varphi(t)$, с помощью которой подынтегральное выражение $f(x)dx$ представляется в виде $u(t)dt$, причем первообразная для функции $u(t)$ известна.

Пример 14. Вычислить интеграл

$$J=\int\sqrt{a^2-x^2}dx, \quad a>0.$$

Решение

Подынтегральная функция определена на отрезке $[-a,\ a]$. Положим $x=\varphi(t)=a\sin t$, тогда $t=\omega(x)=\arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right)$, $\sqrt{\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{x}^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2\cos^2\boldsymbol{t}}=\boldsymbol{a}\cos\boldsymbol{t}$, так как $t\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, $a>0$. Следовательно,

$$J=\int a\cos t\cdot\cos t dt=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)dt=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+C.$$

Так как

$$\sin t=\frac{x}{a},\qquad \cos t=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a},$$

то

$$\frac{1}{2}\cdot\sin 2t=\sin t\cdot\cos t=\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}.$$

Поэтому

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+C.$$

Упражнения

1. Найти интеграл:

$a)$ $\int(3x-5)^{10}dx$; $b)$ $\int x^2\sqrt[5]{5x^3+1}dx$; $c)$ $\int tgxdx$;

$d)$ $\int\dfrac{dx}{2+\cos^2 x}$, $|x|<\dfrac{\pi}{2}$; $e)$ $\int\dfrac{x^7}{\sqrt{1-x^{16}}}dx$; $f)$ $\int\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^6-7x^4+x^2}}dx$. ►

2. Найти интеграл:

$a)$ $\int\dfrac{dx}{2+\sqrt{x}}$; $b)$ $\int\dfrac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$, $x>0$; $c)\int\dfrac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$. ►

3. Найти интеграл:

а) $a)$ $\int\dfrac{3x-1}{x^2-x+1}dx$; $b)$ $\int\dfrac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}}dx$. ►

1.5. Метод интегрирования по частям

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на промежутке Δ. Тогда функция uv также имеет непрерывную производную на Δ и, согласно правилу дифференцирования произведения, выполняется равенство

$$uv' = (uv)' - vu'$$

Интегрируя это равенство и учитывая, что

$$\int (uv)'dx = uv + C,$$

получаем

$$\int uv'dx = uv + C - \int vu'dx.$$

Относя произвольную постоянную $\boldsymbol{C}$ к интегралу $\int vu'dx$ находим

$$\int uv'dx = uv - \int vu'dx \tag{21}$$

или

$$\int udv = uv - \int vdu \ . \tag{22}$$

Формула (21) (или (22)) называется **формулой интегрирования по частям.**

Она сводит вычисление интеграла $\int \boldsymbol{udv}$ к вычислению интеграла $\int \boldsymbol{vdu}$.

Примеры

15. $\int x\cos x dx = \int x d(\sin x) = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C$. ▲

16. Вычислить интеграл

$$J = \int \sqrt{x^2 + a}\,dx.$$

Решение

Полагая $u = \sqrt{x^2 + a}$, $v = x$, по формуле (21) находим

$$J = x\sqrt{x^2 + a} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a}}dx,$$

где

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a}}dx = \int \frac{x^2 + a - a}{\sqrt{x^2 + a}}dx = J - a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}.$$

Отсюда получаем уравнение относительно J

$$J = x\sqrt{x^2 + a} - J + a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}.$$

Используя результат примера 11, находим

$$\int \sqrt{x^2+a}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C. \ \blacktriangle$$

Упражнения

1. Найти интеграл:

$a)\ \int \frac{dx}{\sin x}$; $b)\ \int \ln x dx$; $c)\ \int x \sin x dx$. ►

2. Найти интеграл:

$a)\ \int x^2 e^x dx$; $b)\ \int \arccos^2 x dx$. ►

1.6. Некоторые приложения неопределенного интеграла в экономике

Теперь будем ознакомиться некоторыми приложениями интеграла в экономике.

Пусть $Q(L)$ – функция общего продукта, $MP(L)$ – функция маржинального продукта. Функция маржинального продукта с функцией общего продукта связана следующим образом:

$$MP(L) = \frac{dQ(L)}{dL} \Rightarrow Q(L) = \int MP(L)dL. \qquad (14)$$

Пусть $MP(L) = a = const > 0$. Тогда

$$Q(L) = \int a dL = aL + C.$$

Примеры

17. Если функция маржинального продукта имеет вид $MP(L) = 3(3L+2)$, то найдите функцию общего продукта. Воспользуемся формулой (14) и имеем:

$$Q(L) = \int MP(L)dL = 3\int (3L+2)dL = \frac{9}{2}L^2 + 6L + C. \ \blacktriangle$$

18. Если функция маржинального продукта имеет вид $MP(L) = 4\sin 2L$, то найдите функцию общего продукта. Здесь $L=0 \Rightarrow Q=0$. Воспользуемся формулой (5.14) и имеем:

$$Q(L) = 4\int \sin 2L dL = -2\cos 2L + C.$$

Здесь $L=0 \Rightarrow C=2$. Тогда $Q(L) = -2\cos 2L + 2$. ▲

19. Если функция маржинального продукта имеет вид $MP(L) = 4\cos 2L$, то найдите функцию общего продукта. Здесь $L=0 \Rightarrow Q=3$. Воспользуемся формулой (5.14) и имеем:

$$Q(L)=4\int \cos 2L dL = 2\sin 2L + C.$$

Здесь $L=0 \Rightarrow C=3$. Тогда $Q(L)=2\sin 2L+3$. ▲

Упражнения

a) Если функция маржинального продукта имеет вид $MP(L)=3L\sin 2L$, то найдите функцию общего продукта.

b) Если функция маржинального продукта имеет вид $MP(L)=5L^2\sin 2L$, то найдите функцию общего продукта. Здесь $L=0 \Rightarrow Q=0$.

c) Если функция маржинального продукта имеет вид $MP(L)=4L\ln 3L$, то найдите функцию общего продукта. Здесь $L=0 \Rightarrow Q=2$.

2.1.Метод неопределенных коэффициентов

В ряде случаев по виду подынтегральной функции можно предположить, что ее первообразная будет иметь ту же структуру, что и подынтегральная функция. Это бывает в тех случаях, когда, например, подынтегральная функция представляет собой произведение многочлена и показательной функции, произведение многочлена и синуса или косинуса или произведение показательной функции и синуса или косинуса. Тогда записывают искомую первообразную в предполагаемом виде с неопределенными буквенными коэффициентами. Задача в этом случае сводится к нахождению неопределенных буквенных коэффициентов, для чего, пользуясь свойствами неопределенного интеграла, сначала дифференцирует обе части равенства, а затем сравнивают левую часть полученного равенства с правой. Поясним сказанное на примерах.

Пример 1. Вычислить $\int \left(x^3+2x^2+5\right)e^x dx$.

Решение

Если вычислить этот интеграл с помощью трехкратного интегрирования по частям, то получим:

$$\int\left(x^3+2x^2+5\right)e^x dx=\left(x^3-x^2+2x+3\right)e^x+C.$$

Этот ответ имеет ту же структуру, что и подынтегральная функция, т.е. является (с точностью до произвольной постоянной) произведением многочлена третьей степени на показательную функцию e^x. Поэтому первообразную можно было сразу искать в следующем виде:

$$\int\left(x^3+2x^2+5\right)e^x dx=\left(Ax^3+Bx^2+Cx+D\right)e^x+E, \qquad (1)$$

где E - произвольная постоянная.

Чтобы найти неопределенные коэффициенты $A, B, C, D,$ продифференцируем обе части равенства (1), учитывая при этом что производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(x^3+2x^2+5\right)e^x=\left(3A^2+2Bx+C\right)e^x+\left(Ax^3+Bx^2+Cx+D\right)e^x$$

Разделив обе части этого равенства на e^x, получим:

$$x^3+2x^2+5=3Ax^2+2B+C+Ax^3+Bx^2+Cx+D,$$

откуда

$$x^3+2x^2+5=Ax^3+\left(3A+B\right)x^2+\left(2B+C\right)x+\left(C+D\right). \qquad (2)$$

Воспользуемся теперь тем, что два многочлена тождественно равны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую степень и равны их коэффициенты при одинаковых степенях переменной. Сравнив в тождестве (2) коэффициенты при одинаковых степенях переменной x, получим:

$$\begin{array}{c|l} x^3 & \quad A=1 \\ x^2 & 3A+B=2, \\ x^1 & 2B+C=0 \\ x^0 & C+D=5. \end{array}$$

Мы получили систему из четырех уравнений с четырьмя переменными $A, B, C, D.$

Решая ее, находим: $A=1$, $B=-1$, $C=2$, $D=3$.

Таким образом,

$$\int\left(x^3+2x^2+5\right)e^x dx=\left(x^3-x^2+2x+3\right)e^x+E. \blacktriangle$$

Пример 2. Вычислить $\int e^{3x}\sin 2x\,dx$.

Решение

Здесь подынтегральная функция является произведением показательной функции и синуса. В этом случае ее первообразная равна произведению показательной функции и линейной комбинации синуса и косинуса того же аргумента:

$$\int e^{3x}\sin 2x\,dx = e^{3x}\left(A\cos 2x + B\sin 2x\right) + C. \qquad (3)$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов A и B продифференцируем обе части равенства (3):

$$e^{3x}\sin 2x = 3e^{3x}\left(A\cos 2x + B\sin 2x\right) + e^{3x}\left(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x\right).$$

Разделим обе части этого равенства на e^{3x}:

$$\sin 2x = 3A\cos 2x + 3B\sin 2x - 2A\sin 2x + 2B\cos 2x.$$

Далее имеем:

$$\sin 2x = (3B - 2A)\sin 2x + (3A + 2B)\cos 2x.$$

Полученное равенство справедливо для любых значений x.Это имеет место тогда, когда равны коэффициенты при $\sin 2x$ и $\cos 2x$ в левой и правой частях равенства. Приравняв друг другу указанные коэффициенты, получим:

$$\begin{array}{r|l} \sin 2x & 3B - 2A = 1, \\ \cos 2x & 3A + 2B = 0. \end{array}$$

Из этой системы двух уравнений с двумя переменными A и B находим: $A = -\dfrac{2}{13}$, $B = \dfrac{3}{13}$. Значит

$$\int e^{3x}\sin 2x\,dx = e^{3x}\left(-\frac{2}{13}\cos 2x + \frac{3}{13}\sin 2x\right) + C = \frac{1}{13}e^{3x}\left(3\sin 2x - 2\cos 2x\right) + C. \ \blacktriangle$$

Упражнение

Используясь методом неопределенных коэффициентов, вычислите следующие интегралы:

$\int \left(3x^2 + 2x - 1\right)e^{2x}\,dx$; $\qquad \int \left(5x^2 - 8x + 2\right)e^{-x}dx$;

$\int e^{-x}\cos 3x\,dx$; $\qquad \int (x+8)\sin 2x\,dx$. ►

2.2. Интегрирование рациональных функций

2.2.1. Интегрирование простейших рациональных функций. Рассмотрим интеграл вида

$$\int R(x)\, dx,$$

где $y = R(x)$-рациональная функция. Всякое рациональное выражение $R\,(x)$ можно представить в виде $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ - многочлены. Если эта дробь неправильная, т.е. если степень числителя больше или равна степени знаменателя, то ее можно представить в виде суммы многочлена (целая часть) и правильной дроби. Поэтому достаточно рассмотреть интегрирование правильных дробей.

Покажем, что интегрирование таких дробей сводится к интегрированию *простейших дробей*, т.е. выражений вида:

$$1)\frac{A}{x-a};\quad 2)\frac{A}{(x-a)^n};\quad 3)\frac{Ax+B}{x^2+px+q};\quad 4)\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n},$$

где $A,\ B,\ a,\ p,\ q$ - действительные числа, а квадратный трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней. Выражение вида 1) и 2) называют *дробями 4-го рода*, а выражения вида 3) и 4) – *дробями 2-го рода*.

Интегралы от дробей 1-го рода вычисляются непосредственно

1) $$\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|\,x-a\,| + C;$$

2) $$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int (x-a)^{-n}dx = A\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C\,(n=2,3,4,\,...).$$

Рассмотрим вычисление интегралов от дробей 2-го рода:

3) $$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx.$$

Сначала заметим, что

$$\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}arctg\,\frac{t}{a} + C,$$

$$\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln\left(t^2+a^2\right) + C.$$

Чтобы свести вычисление интеграла 3) к этим двум интегралам, преобразуем квадратный трехчлен $x^2 + px + q$, выделив из него полный квадрат:

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right).$$

Так как предположению этот трехчлен не имеет действительных корней, то $q - \dfrac{p^2}{q} > 0$ и мы можем положить $q - \dfrac{p^2}{4} = a^2$. Подстановка $x + \dfrac{p}{2} = t,\ dx = dt$ преобразует интеграл 3) к линейной комбинации указанных двух интегралов:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{A\left(t - \frac{p}{2}\right) + B}{t^2 + a^2}dt =$$

$$= A\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{A}{2}\ln\left(t^2+a^2\right) + \frac{1}{2}\left(B - \frac{Ap}{2}\right) arctg\,\frac{t}{a}.$$

В окончательном ответе нужно лишь заменить t на $x + \dfrac{p}{2}$, а $\sqrt{q - \dfrac{p^2}{4}}$. Так как $t^2 + a^2 = x^2 + px + q$, то

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{\left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C.$$

4) $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx.$

Как и в предыдущем случае, положим $x + \dfrac{p}{2} = t$. Получим:

$$I_2 = \frac{1}{2}I_1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{t}{t^2+1}.$$

Но

$$I_1=\int\frac{dt}{t^2+1}=arctg\,t.$$

Таким образом,

$$I_2=\frac{1}{2}arctg\,t+\frac{1}{2\left(t^2+1\right)}.$$

Окончательно получаем:

$$\int\frac{x+2}{\left(x^2+6x+10\right)^2}dx=-\frac{1}{2\left(t^2+1\right)}-\frac{1}{2}arctg\,t-\frac{t}{2\left(t^2+1\right)}=$$

$$=-\frac{1}{2\left(x^2+6x+10\right)}-\frac{1}{2}arctg\left(x+3\right)-\frac{x+3}{2\left(x^2+6x+10\right)}+C=$$

$$=\frac{-x-4}{2\left(x^2+6x+10\right)}-\frac{1}{2}arctg\left(x+3\right)+C.$$

Упражнение

Вычислите следующие интегралы от простейших дробей.

$\int\frac{dx}{6x^2+x+2}$. ▶

$\int\frac{5x+3}{\left(x^2+2\right)^2}dx$. ▶

$\int\frac{dx}{\left(2x+3\right)^3}$. ▶

$\int\frac{3x+2}{x^2-3x+8}dx$. ▶

$\int\frac{2x-7}{\left(x^2+4x+15\right)^2}dx$. ▶

2.2.2. Интегрирование правильных дробей. Рассмотрим правильную дробь $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $Q(x)$ - многочлен степени n. Не теряя общности, можно считать, что старший коэффициент в $Q(x)$ равен 1. В курсе алгебры доказывается, что такой многочлен с действительными коэффициентами:

$$Q(x)=\left(x-x_1\right)^{\alpha}\ldots\left(x-x_k\right)^{\beta}\left(x^2+px+q\right)^{\nu}\ldots\left(x^2+rx+s\right)^{\delta},$$

где $x_1,\ldots,x_k$ - действительные корни многочлена $Q(x)$, а квадратные трехчлены не имеют действительных корней. Можно доказать, что тогда $R(x)$ представляется в виде суммы простейших дробей вида 1) – 4):

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-x_1)}+\frac{A_2}{(x-x_1)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_\alpha}{x-x_1}+$$

$$+\ldots+\frac{B_1}{(x-x_k)}+\frac{B_2}{(x-x_k)^{\beta-1}}+\ldots+\frac{B_\beta}{x-x_k}+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{\nu}}+$$

$$+\ldots+\frac{M_\nu x+N_\nu}{x^2+px+x}+\ldots+\frac{E_1x+F_1}{(x^2+rx+s)^{\delta}}+\ldots+\frac{E_\delta x+F_\delta}{x^2+rx+s}, \qquad (1)$$

где показатели у знаменателей последовательно уменьшаются от α до $1, \ldots,$ от β до 1, от γ до $1, \ldots,$ от δ до 1, а $A_1, \ldots, F_\delta$ неопределенные коэффициенты. Для того чтобы найти эти коэффициенты, необходимо освободиться от знаменателя и, получив равенство двух многочленов, воспользоваться методом неопределенных коэффициентов.

После нахождения неопределенных коэффициентов остается вычислить интегралы от полученных простейших дробей. Так как при интегрировании простейших дробей получаются, как мы видели, лишь рациональные функции, арктангенсы и логарифмы, то *интеграл от любой рациональной функции выражается через рациональную функцию, арктангенсы и логарифмы*.

Пример 3. Вычислить $\int \frac{6x+1}{x^2+2x-3}dx$.

Решение

Разложим знаменатель подынтегральной функции на множители:

$$x^2+2x-3=(x-1)(x+3).$$

Выпишем подынтегральную функцию и представим ее в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{6x+1}{(x-1)(x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}.$$

Освободившись в этом равенстве от знаменателей, получим:

$$6x+1=A(x+3)+B(x-1). \qquad (2)$$

Для отыскания коэффициентов воспользуемся методом подстановки частных значений. Для нахождения коэффициента A положим $x=1$. Тогда из равенства (2) получим $7=4A$, откуда $A=\frac{7}{4}$. Для отыскания коэффициента B положим $x=-3$. Тогда из равенства (2) получим $-17=-4B$, откуда $B=\frac{17}{4}$.

$$\frac{6x+1}{(x-1)(x+3)}=\frac{\frac{7}{4}}{x-1}+\frac{\frac{17}{4}}{x+3}.$$

Значит,

$$\int\frac{6x+1}{x^3+2x-3}dx=\frac{7}{4}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{17}{4}\int\frac{dx}{x+3}=\frac{7}{4}\ln|x-1|+\frac{17}{4}\ln|x+3|+C. \quad \blacktriangle$$

Пример 4. Вычислим $\int\frac{x^4+2x^2+8x+5}{(x^2+2)(x-1)^2(x+2)}dx$.

Решение

Выпишем подынтегральную функцию и представим ее в виде суммы простейших дробей. В знаменателе содержится множитель x^2+2, не имеющий действительных корней, ему соответствует дробь 2-го рода:

$$\frac{Ax+B}{x^2+2},$$

множителю $(x-1)^2$ соответствует одна дробь 1-го рода $\frac{E}{x+2}$. Таким образом, подынтегральную функцию мы представим в виде суммы четырех дробей:

$$\frac{x^4+2x^2+8x+5}{(x^2+2)(x-1)^2(x+2)}=\frac{Ax+B}{x^2+2}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{x-1}+\frac{E}{x+2}. \qquad (3)$$

Освободимся в этом равенстве от знаменателей. Получим:

$$x^4+2x^2+8x+5=(Ax+B)(x-1)^2(x+2)+C(x^2+2)$$

$$(x+2)+D(x^2+2)(x-1)(x+2)+E(x^2+2)(x-1)^2 \qquad (4)$$

Знаменатель подынтегральной функции имеет два действительных корня $x=1$, $x=-2$. При подстановке в равенство (4) значения $x=1$ получаем $16=9C$, откуда находим $C=\frac{16}{9}$. при подстановки $x=-2$ получаем $13=54E$ и соответственно определяем $E=\frac{13}{54}$. Подстановка значения $x=i\sqrt{2}$ (корня многочлена x^2+2) позволяет перейти к равенству

$$4-4+8i\sqrt{2}+5=\left(Ai\sqrt{2}+B\right)\left(i\sqrt{2}-1\right)^2\left(i\sqrt{2}+2\right).$$

Оно преобразуется к виду:

$$(10A+2B)+(2A-5B)\sqrt{2}\,i=5+8\sqrt{2}\,i,$$

откуда $10A+2B=5$, а $(2A-5B)\sqrt{2}=8\sqrt{2}$.

Решив систему двух уравнений с двумя переменными

$$\begin{cases}10A+2B=5,\\ 2A-5B=6,\end{cases}$$

находим: $A=\frac{41}{54}, B=-\frac{35}{27}$.

Осталось определить значение коэффициента D. Для этого в равенстве (4) раскроем скобки, приведем подобные члены, а затем сравним коэффициенты при x^4. Получим :

$$A+D+E=1, \text{ т.е. } D=0.$$

Подставим найденные значения коэффициентов в равенство (3) :

$$\frac{x^4+2x^2+8x+5}{\left(x^2+2\right)(x-1)^2(x+2)}=\frac{\frac{41}{54}x-\frac{35}{27}}{x^2+2}+\frac{\frac{16}{9}}{(x-1)^2}+\frac{\frac{13}{54}}{x+2}$$

а затем перейдем к интегрированию:

$$\int\frac{x^4+2x^2+8x+5}{\left(x^2+2\right)(x-1)^2(x+2)}dx=\frac{41}{54}\int\frac{x\,dx}{x^2+2}-\frac{35}{27}\int\frac{dx}{x^2+2}+$$

$$+\frac{16}{9}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{13}{54}\int\frac{dx}{x+2}=\frac{41}{108}\ln\left(x^2+2\right)-\frac{35}{27\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}-$$

$$-\frac{16}{9(x-1)}+\frac{13}{54}\ln|x+2|+C. \ \blacktriangle$$

Упражнение

Вычислите следующие интегралы от правильных дробей.

$\int \frac{x^2+2}{x^3+x^2-2x}\,dx$.

$\int \frac{3x-2}{(x+1)(x^2-9)}\,dx$.

$\int \frac{x^2\,dx}{(x+1)(x+3)^2}$.

$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+1)}$.

$\int \frac{x\,dx}{x^3+1}$.

$\int \frac{2x-1}{(x^2+2)(x^2+4)}\,dx$. ▶

2.2.3. Интегрирование неправильных дробей. Пусть нужно проинтегрировать функцию, где $f(x)$ и $g(x)$ - многочлены, причем степень многочлена $f(x)$ больше или равна степени многочлена $g(x)$. В этом случае прежде всего необходимо выделить целую часть неправильной дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$, т.е. представить ее в виде

$$\frac{f(x)}{g(x)}=s(x)+\frac{r(x)}{g(x)}$$

где $s(x)$ - многочлен степени, равной разности степеней многочленов $f(x)$ и $g(x)$, а $\frac{r(x)}{g(x)}$- правильная дробь.

Тогда

$$\int\frac{f(x)}{g(x)}dx=\int s(x)dx+\int\frac{r(x)}{g(x)}dx.$$

Пример 5. Вычислить $\int\frac{x^4-4x^3+x^2+16x-11}{(x-1)(x+2)(x-3)}dx$.

Решение

Имеем:

$$g(x)=(x-1)(x+2)(x-3)=x^3-2x^2-5x+6,$$

$$f(x)=x^4-4x^3+x^2+16x-11.$$

Для выделения целой части разделим $f(x)$ на $g(x)$:

$$\begin{array}{r|l} -\,x^4-4x^3+x^2+16x-11 & \\ \underline{x^4-2x^3-5x+6x} & \underline{x^3-2x^2-5x+6} \\ -\,-2x^3+6x^2+10x-11 & x-2 \\ \underline{-2x^3+4x^2+10x-12} & \\ 2x^2\quad+\;1 & \end{array}$$

Итак,

$$\frac{f(x)}{g(x)}=x-2+\frac{2x^2+1}{x^2-2x^2-5x+6}.$$

Значит,

$$\int\frac{x^4-4x^3+x^2+16x-11}{(x-1)(x+2)(x-3)}dx=\int(x-2)+dx+\int\frac{2x^2+1}{(x-1)(x+2)(x-3)}dx.$$

Имеем:

$$\int(x-2)dx=\frac{x^2}{2}-2x+C_1.$$

Для вычисления интеграла $\int\frac{2x^2+1}{(x-1)(x+2)(x-3)}dx$ применяется, как и выше, метод неопределенных коэффициентов. После вычислений, которые мы оставляем читателю, получаем:

$$\int\frac{x^4-4x^3+x^2+16-11}{(x-1)(x+2)(x-3)}dx=\frac{x^2}{2}-2x-\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{3}{5}\ln|x+2|+\frac{19}{10}\ln|x-3|+C.$$ ▲

Упражнение

Вычислите следующие интегралы от неправильных дробей.

$\int\frac{x^5+x-1}{x-2}dx.$ $\qquad$ $\int\frac{x^4+2}{x^3-x}dx.$

$\int\frac{x^3+4}{x^2-6x+8}dx.$ $\qquad$ $\int\frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx.$ ▶

2.3.Интегрирование иррациональных функций

При интегрировании иррациональных функций используются различные приемы. Мы рассмотрим метод *рационализации* подынтегрального выражения. Он заключается в выборе такой подстановки $t=\varphi(x)$, которое данное подынтегральное выражение преобразует в рациональное относительно новой переменной t. Поскольку рациональные функции мы умеем интегрировать, такие подстановки позволяют интегрировать и иррациональные функции.

Пусть $R\left(x,\ y\right)$- рациональная функция от x и y, т.е. функция, получаемая из x, y и чисел с помощью конечного числа арифметических операций (сложения, умножения и деления). Примерами таких функций могут служить

$$z=\frac{x^2-y^2}{x^2+3y^2(4x-y)};\qquad\qquad z=\frac{x^3+y^3}{x-y}+\frac{\left(x^5-6y^2\right)^7}{\left(8x^3-9xy\right)^3}.$$

Если заменить в $R\left(x,\ y\right)$ переменную у выражением $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, то получим функцию $R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$то одной переменной x. Интеграл от нее имеет вид:

$$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx.$$

Этот интеграл рационализируется с помощью подстановки

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t.$$

В самом деле, так как подкоренное выражение представляет собой дробно – линейную относительно x функцию, то переменная x рационально выражается через переменную t:

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^n,\qquad x=\frac{b-dt^n}{ct^n-a}=g\left(t\right).$$

Тогда $x'=g'\left(t\right)$ - рациональная функция. Заменяя теперь переменную в данном интеграле, получим интеграл от рациональной функции новой переменной t:

$$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx=\int R(g(t),)\ \ g'(t)\,dt.$$

Замечание. Если под знаком интеграла содержатся корни с разными показателями, но с одним и тем же дробно – линейным относительно x подкоренным выражением, то сначала следует провести их к одному показателю, после чего использовать указанный прием.

Примеры

6. Вычислить $\int \dfrac{dx}{(x-1)(x+2)\sqrt[4]{\dfrac{x+2}{x-1}}}$.

Решение

Учитывая, что под корнем содержится дробно–линейно выражение, воспользуемся подстановкой

$$\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}=t, \text{ откуда } \quad x=\frac{t^4+2}{t^4-1}.$$

Выразим все компоненты подынтегрального выражения через t.

$$x-1=\frac{t^4+2}{t^4-1}-1=\frac{3}{t^4-1};\quad x+2=\frac{t^4+2}{t^4-1}+2=\frac{3t^4}{t^4-1};$$

$$dx=\left(\frac{t^4+2}{t^4-1}\right)' dt=-\frac{12t^3}{\left(t^4-1\right)^2}dt.$$

Заменив под знаком интеграла переменную x новой переменной t, получим:

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)\sqrt[4]{\dfrac{x+2}{x-1}}}=\int \frac{-\dfrac{12t^3}{\left(t^4-1\right)^2}dt}{\dfrac{3}{t^4-1}\cdot\dfrac{3t^4}{t^4-1}\cdot t}=-\frac{4}{3}\int\frac{dt}{t^2}=\frac{4}{3t}+C=\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}+C.$$

▲

7. Вычислить $I=\int \dfrac{1+7\sqrt[3]{\dfrac{5x-1}{7}}-5x}{\sqrt[6]{\dfrac{5x-1}{7}}+\sqrt[3]{\dfrac{5x-1}{7}}+\sqrt{\dfrac{5x-1}{7}}}dx$.

Решение

В данном случае под знаком интеграла содержатся корни с разными показателями, но с одним и тем же подкоренным выражением. Наименьшее общее кратное всех показателей корней, входящих в состав подынтегрального выражения, равно 6, поэтому данный интеграл от иррациональной функции может быть рационалиризован с помощью подстановки:

$$\sqrt[6]{\frac{5x-1}{7}}=t,\ \ x=\frac{7t^6+1}{5}.$$

Тогда

$$dx=\frac{42}{5}t^5dt,\quad \sqrt{\frac{5x-1}{7}}=t^3,\quad \sqrt[3]{\frac{5x-1}{7}}=t^2.$$

Заменив переменную под знаком интеграла, получим:

$$I=\int\frac{1+7t^2-\left(7t^6+1\right)}{t+t^2+t^3}\cdot\frac{42}{5}t^2dt=-\frac{294}{5}\int\frac{t^{10}-t^6}{t^2+t+1}dt.$$

Под знаком интеграла содержится неправильная рациональная дробь. Для выделения целой части разделим числитель на знаменатель так, как это было сделано ранее.

Получаем:

$$\frac{t^{10}-t^6}{t^2+t+1}=t^8-t^7+t^5-2t^4+t^3+t^2-2t+1+\frac{t-1}{t^2+t+1}.$$

Поэтому

$$I=-\frac{294}{5}\int\left(t^8-t^7+t^5-2t^4+t^3+t^2-2t+1+\frac{t-1}{t^2+t+1}\right)dt=$$

$$=-\frac{294}{5}\left(\frac{t^9}{9}-\frac{t^9}{8}+\frac{t^6}{6}-\frac{2t^5}{5}+\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}-t^2+t+\int\frac{t-1}{t^2+t+1}dt\right).$$

Для вычисления $\int\frac{t-1}{t^2+t+1}dt$ выделим в знаменателя полный квадрат аналогично тому, как это было сделано в предыдущем примере. Получим:

$$\int\frac{t-1}{t^2+t+1}dt=\frac{1}{2}\ln\left(t^2+t+1\right)-\sqrt{3}arctg\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Окончательно находим:

$$I=-\frac{294}{5}\left(\frac{t^9}{9}-\frac{t^8}{8}+\frac{t^6}{6}-\frac{2t^5}{5}+\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}-t^2+t+\frac{1}{2}\ln\left(t^2+t+1\right)-\sqrt{3}arctg\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)+C,$$

где $t=\sqrt[6]{\frac{5x-1}{7}}$. ▲

Упражнение

Вычислите следующие интегралы от иррациональных функций.

$$\int \frac{\sqrt{4+x}}{x}\,dx.$$

$$\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}\,dx.$$

$$\int \frac{1}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\,dx.$$

$$\int x\sqrt{1+x}\,dx.$$

$$\int \frac{1-2\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}\,dx.$$

$$\int \frac{\sqrt[6]{2x-1}+1}{(2x-1)\left(\sqrt[3]{2x-1}-1\right)}dx.$$

►

2.4. Интегрирование тригонометрических функций

Рассмотрим интегралы вида

$$\int R\left(\sin x, \cos x\right) dx,$$

где $R\left(u, v\right)$ -рациональная функция. Такие интегралы всегда рационализируются подстановкой $t = tg\frac{x}{2}$ $\quad \left(-\pi < x < \pi\right)$. в самом деле,

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

Во многих случаях удается упростить вычисление интегралов вида $\int R\left(\sin x, \cos x\right) dx$, воспользовавшись другими подстановками. Так, если при изменении знака $\sin x$ меняется знак $R\left(\sin x, \cos x\right)$:

$$R\left(-\sin x, \cos x\right) = -R\left(\sin x, \cos x\right),$$

то интеграл можно рационализировать с помощью подстановки $\cos x = t$. Если при изменении знака $\cos x$ меняется знак $R\left(\sin x, \cos x\right)$:

$$R\left(\sin x, -\cos x\right) = -R\left(\sin x, \cos x\right),$$

то целесообразна подстановка $\sin x = t$. Если при одновременном изменении знака $\sin x$ и $\cos x$ $R\left(\sin x, \cos x\right)$ не меняются:

$$R\left(-\sin x, -\cos x\right) = -R\left(\sin x, \cos x\right),$$

то рационализация достигается с помощью одной из подстановок:

$$tg\ x = t, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \text{или } ctg\ x = t, \qquad 0 < x < \pi.$$

Поясним сказанное на примерах.

Примеры

8. Вычислить $\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx$.

Решение

В данном случае имеем:

$$R\left(-\sin x, \cos x\right) = -\left(-\sin x\right)^3 \cos^2 x = -\sin^3 x \cos^2 x.$$

Воспользуемся подстановкой $\cos x = t$.Заметим, что

$$\sin^3 x \cos^2 x\, dx = \sin^2 x \cos^2 x \sin x\, dx = -\left(1 - \cos^2 x\right) \cos^2 x$$

$$\left(-\sin x\, dx\right) = -\left(1 - \cos^2 x\right) \cos^2 x\, d\left(\cos x\right).$$

Значит,

$$\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx = -\int \left(1 - t^2\right) t^2 dt =$$

$$= \int \left(t^4 - t^2\right) dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C. \quad \blacktriangle$$

9. Вычислим $\int \frac{\cos^3 x\, dx}{1 + \sin^2 x}$.

Решение

В данном случае имеем:

$$R\left(\sin x, -\cos x\right) = \frac{\left(-\cos x\right)^3}{1 + \sin^2 x} = -\frac{\cos^3 x}{1 + \sin^2 x} = -R\left(\sin x, \cos x\right).$$

Воспользуемся подстановкой $\sin x = t$:

$$\int \frac{\cos^3 x\, dx}{1 + \sin^2 x} = \int \frac{\cos^2 x}{1 + \sin^2 x} \cos x\, dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{1 + \sin^2 x} d\left(\sin x\right) =$$

$$= \int \frac{1 - t^2}{1 + t^2} dt = \int \left(\frac{2}{1 + t^2} - 1\right) dt = 2\, arctg\, t - t + C =$$

$$= 2\, arctg\left(\sin x\right) - \sin x + C\, . \quad \blacktriangle$$

10. Вычислить $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx$.

Решение В данном случае имеем:

$$R\left(-\sin x, -\cos x\right) = R\left(\sin x, \cos x\right),$$

Значит, в качестве рационализирующей может выступить одна из двух подстановок $tg\, x = t$ или $ctg\, x = t$. Имеем:

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx = \int ctg^2 x \frac{dx}{\sin^2 x}.$$

В данном случае целесообразно сделать подстановку $ctg\ x = t$

Тогда $dt = -\dfrac{dx}{\sin^2 x}$ и, следовательно,

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx = -\int t^2 dt = -\frac{t^3}{3} + C = -\frac{1}{3} ctg^3 x + C. \ \blacktriangle$$

При вычислении интегралов от тригонометрических функций для преобразования подынтегральных выражений часто используются различные формулы тригонометрии. В первую очередь при

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}; \qquad (5)$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}; \qquad (6)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2} \qquad (7)$$

и их частные случаи:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2};$$

Из формул (5), (6), (7) получаем, что при $n \neq m$

$$\int \sin mx \cos nx \ dx = \frac{1}{2}\int \sin(m+n)x + \sin(m-n)x \ dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos(m+n)x}{m+n} + \frac{\cos(m-n)x}{m-n}\right) + C.$$

$$\int \cos mx \cos nx \, dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos(n+n)x + \cos(m-n)x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right) + C.$$

$$\int \sin mx \sin nx \, dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right) + C.$$

Примеры

11. Вычислим $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$.

Решение $\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx = \int \left(\sin^2 x \cos^2 x\right) \cos^2 x\, dx =$

$$= \frac{1}{4} \int \sin^2 2x \cos^2 x\, dx = \frac{1}{4} \int \frac{1-\cos 4x}{2} \cdot \frac{1+\cos 2x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{6} \int (1-\cos 4x + \cos 2x - \cos 4x \cos 2x) dx = \frac{1}{16}\left(x - \frac{\sin 4x}{4} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin 2x}{2} - \int \frac{\cos 6x + \cos 2x}{2} \right) = \frac{1}{16}\left(x - \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 2x}{2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 2x}{2} \right) \right) + C = \frac{1}{16}\left(x + \frac{1}{4}\sin 2x - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{12}\sin 6x \right) + C \ . \ \blacktriangle$$

12. Вычислим $\int \sin x \sin 3x \sin 5x\, dx$.

Решение Несколько раз воспользуемся формулами преобразования произведения в сумму:

$$\int \sin x \sin 3x \sin 5x\, dx = \frac{1}{2} \int (\cos 2x - \cos 4x) \sin 5x\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 2x \sin 5x\, dx - \frac{1}{2}\int \cos 4x \sin 5x\, dx = \frac{1}{4}\int (\sin 7x +$$

$$+ \sin 3x)\, dx - \frac{1}{4}\int (\sin 9x + \sin)\, dx = \frac{1}{4}\left(-\frac{\cos 7x}{7} - \frac{\cos 3x}{3} \right) -$$

$$-\frac{1}{4}\left(-\frac{\cos 9x}{9} - \cos x \right) + C = \frac{7\cos 9x + 63\cos x - 9\cos 7x - 21\cos 3x}{252} + C . \ \blacktriangle$$

Упражнение

Вычислите следующие интегралы от тригонометрических функций.

$\int tg^5 x\, dx$.

$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^7} dx$

$\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} dx$

$\int tg^4 x\, dx$.

$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}$.

$\int \frac{dx}{4 - 3\cos^2 x + 5\sin^2 x}$.

$\int \sin^5 x \cos^4 x\, dx$.

$\int \frac{dx}{\cos^5 x}$.

$\int \frac{\cos^3 x}{1+\sin x} dx$.

$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx$.

$\int \frac{dx}{\sin^4 x}$. $\int \cos^8 x\,dx$

.

3.1. Задача о вычислении площади криволинейной трапеции

Криволинейной трапецией называют фигуру в плоскости xOy, ограниченную прямыми $x=a$, $x=b$, $(a<b)$ и графиками функций $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, непрерывных на $[a,\ b]$ и таких, что $f_1(x)\le f_2(x)$ для всех $x\in[a,\ b]$ (рис. 1).

Рассмотрим частный случай такой трапеции, ограниченной прямыми $x=a$, $x=b$, $y=0$ и графиком непрерывной и неотрицательной на $[a,\ b]$ функции $\boldsymbol{y=f(x)}$ (рис. 2). Как найти площадь такой фигуры? Правда, само понятие площади также нуждается в определении, но к этому мы вернемся позднее . Пока же будем опираться на интуитивное представление о площади.

Разобьем отрезок $[a,\ b]$ на ряд мелких участков точками

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

на каждом участке $[x_k,\ x_{r+1}]$ найдем наименьшее значение функции $y=f(x)$, обозначим его m_k и рассмотрим прямоугольник с основанием $[x_k,\ x_{k+1}]$ и высотой m_k (рис. 3); его площадь равна $m_k(x_{k+1}-x_k)$.

Объединение этих прямоугольников представляет собой вписанную в данную криволинейную трапецию ступенчатую фигуру (рис. 4); ее площадь обозначим s_T (буква T символизирует то разбиение отрезка $[a,\ b]$, которое мы осуществили). Аналогично, если на каждом участке $[x_k,\ x_{r+1}]$ выбрать наибольшее значение функции M_k и рассмотреть прямоугольник с высотой M_k, то объединение таких прямоугольников даст описанную около данной криволинейной трапеции ступенчатую фигуру (рис. 5); ее площадь обозначим S_T.

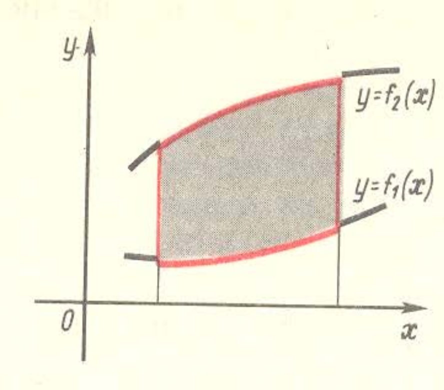

Рис. 1

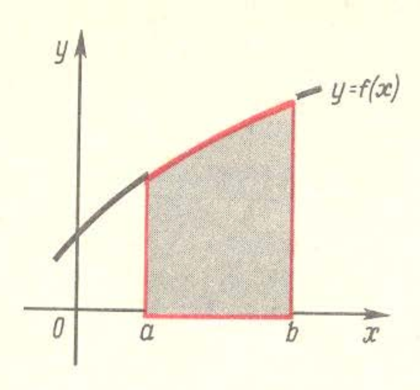

Рис. 2

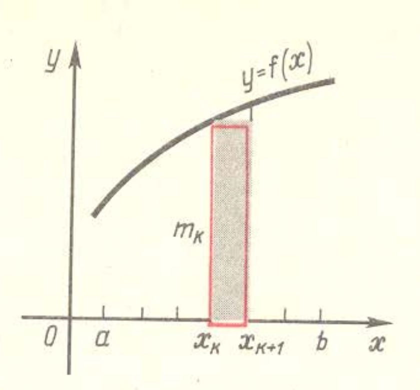

Рис.3

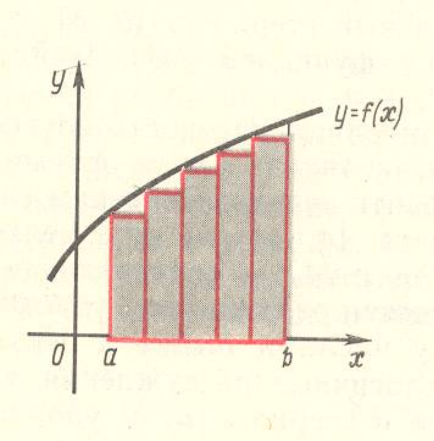

Рис. 4

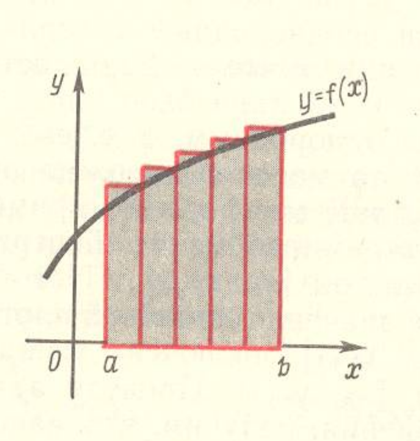

Рис.5

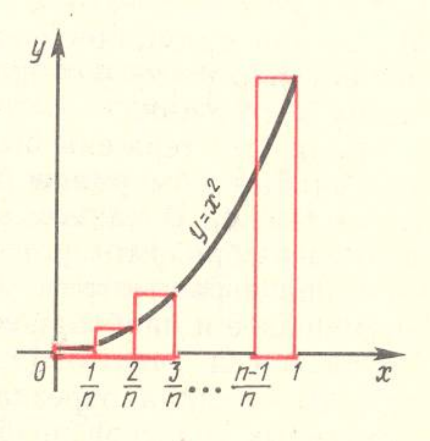

Рис.6

Очевидно, что для любого разбиения T выполняется неравенство $s_T \le S \le S_T$, где S - искомая площадь криволинейной трапеции. Эту площадь можно определить как число, которое не меньше площади любой вписанной ступенчатой фигуры и не больше площади любой описанной ступенчатой фигуры, а точнее как число, разделяющее множества $\{s_T\}$ и $\{S_T\}$ для всевозможных разбиений T отрезка $[a,\ b]$. Интуитивно ясно, что такое разделяющее число должно быть единственным.

Искомая площадь S приближенно равна площади вписанной или описанной ступенчатой фигуры, т. е. $S \approx s_T$ или $S \approx S_T$.

На практике делят отрезок $[a,\ b]$ на n равных частей и вместо s_T используют запись s_n, а вместо S_T - запись S_n- Чем больше n, тем точнее приближенное равенство $s_n \approx S$ или $S_n \approx S$. Точное равенство получается при переходе к пределу: $S = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ или $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Пример 1 (Архимеда). Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямыми $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ (рис. 6).

Решение

Разделим отрезок [0, 1] на n равных частей точками

$$x_0 = 0,\quad x_1 = \frac{1}{n},\quad x_2 = \frac{2}{n},\quad \ldots\quad, x_{n-1} = \frac{n-1}{n},\quad x_n = \frac{n}{n} = 1.$$

Тогда

$$f(x_0) = 1,\quad f(x_1) = \frac{1^2}{n^2},\quad f(x_2) = \frac{2^2}{n^2},\quad \ldots\quad, f(x_{n-1}) = \frac{(n-1)^2}{n^2},\quad f(x_n) = \frac{n^2}{n^2} = 1.$$

Составим сумму $\boldsymbol{S_n}$ (площадь ступенчатой фигуры на рис. 6):

$$S_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \frac{3^2}{n^2} + \cdots + \frac{n^2}{n^2}\right) = \frac{1}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2\right).$$

Методом математической индукции можно доказать, что

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Значит,

$$S_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \frac{3^2}{n^2} + \cdots + \frac{n^2}{n^2}\right) = \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2},$$

откуда

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Заметим, что этот результат был получен еще Архимедом с помощью предельного перехода. ►

3.2. Задача о массе материальной плоской пластины

Пусть дан прямолинейный неоднородный материальный стержень $[a,\ b]$, линейная плотность которого в точке $\boldsymbol{x}$ выражается функцией $\rho(\boldsymbol{x})$. Найдем массу μ стержня.

Если бы стержень был однородным, т. е. его линейная плотность во всех точках была бы равна ρ, то масса μ стержня вычислялась бы по формуле $\mu = \rho(b-a)$. В данном случае эту формулу применить нельзя. Поступим следующим образом: произведем разбиение T отрезка $[a,\ b]$ на ряд мелких участков и рассмотрим участок $[x_k,\ x_{k+1}]$. Пусть m_k и M_k - соответственно наименьшее и наибольшее значения линейной плотности $\rho(\boldsymbol{x})$ на этом участке. Тогда масса участка $[x_k,\ x_{k+1}]$ заключена между числами $m_k\Delta x_k$ и $M_k\Delta x_k$, где $\boldsymbol{\Delta x_k}$ - длина отрезка $[x_k,\ x_{k+1}]$. Проведя аналогичные рассуждения для остальных участков разбиения, получим, что масса μ стержня $[a,\ b]$ удовлетворяет двойному неравенству

$$s_T \le \mu \le S_T,$$

где

$$s_T = m_0\Delta x_0 + m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \cdots + m_{n-1}\Delta x_{n-1} \equiv \sum_{k=0}^{n-1} m_k\Delta x_k,$$

$$S_T = M_0\Delta x_0 + M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \cdots + M_{n-1}\Delta x_{n-1} \equiv \sum_{k=0}^{n-1} M_k\Delta x_k.$$

Таким образом, масса стержня есть число, разделяющее множества $\{s_T\}$ и $\{S_T\}$ для всевозможных разбиений T отрезка $[a,\ b]$.

3.3. Определение определенного интеграла

Две различные задачи, рассмотренные в предыдущих пунктах, в процессе решения привели к одной и той же математической модели - к двум определенным образом построенным числовым множествам $\{s_T\}$ и $\{S_T\}$, разделяющимся единственным числом: в первом случае это число определяет площадь криволинейной трапеции, во втором — массу стержня. Оказывается, многие важные задачи из геометрии, физики, техники и других дисциплин, в том числе экономики приводят к такой же математической модели, поэтому есть смысл специально заняться ее изучением. Прежде всего нужно более точно осмыслить процесс решения двух рассмотренных выше задач, отвлекаясь от их конкретного содержания.

Итак, пусть на отрезке $[a,\ b]$ определена ограниченная функция

$y = f(x)$. Произведем разбиение T отрезка $[a,\ b]$ точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

на каждом из отрезков разбиения $[x_k,\ x_{k+1}]$ найдем нижнюю и верхнюю грани значений функции, обозначим их соответственно m_k и M_k, и составим суммы

$$s_T = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k, \qquad S_T = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k.$$

Первая из этих сумм называется **нижней,** а вторая - **верхней суммой Дарбу**.

Эти суммы обладают следующими свойствами:

1°. Для любого $\boldsymbol{T}$ справедливо неравенство $s_T \le S_T$.

Доказательство следует из того, что $m_k \le M_k$.■

2°. Если к данному разбиению T_1 добавить несколько новых точек, получив тем самым разбиение T_2 отрезка $[a,\ b]$, то $s_{T_1} \le s_{T_2}$, а $S_{T_1} \ge S_{T_2}$

Доказательство следует из того, что если отрезок $[x_k,\ x_{k+1}]$ разбить на два отрезка и на каждом из них найти нижние и верхние грани значений функции - соответственно m'_k, m''_k, M'_k, M''_k - то, $m_k \le m'_k$, $m_k \le m''_k$, в то время как $M_k \ge M'_k$, $M_k \ge M''_k$. ■

3°. Для любых разбиений T_1 и T_2 отрезка $[a,\ b]$ выполняется неравенство $s_{T_1} \le S_{T_2}$

Доказательство следует из того что, составив разбиение T, включающее в себя все точки разбиения T_1 и все точки разбиения T_2, а затем используя свойства 1° и 2°, получим $s_{T_1} \le s_T \le S_T \le S_{T_2}$.■

Последнее свойство означает, что множество M нижних сумм Дарбу расположено левее множества N верхних сумм Дарбу, построенных для ограниченной на отрезке $[a,\ b]$ функции $y = f(x)$. Тогда найдется хотя бы одно число I, разделяющее множества M и N, т. е. такое, что для любого разбиения отрезка $[a,\ b]$ выполняется двойное неравенство

$$s_T = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k \le I \le \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k = S_T .$$

Функция $y = f(x)$, ограниченная на отрезке $[a,\ b]$, называется **интегрируемой на этом отрезке**, если существует единственное число I, разделяющее множества нижних и верхних сумм Дарбу, образованных для всевозможных разбиений отрезка $[a,\ b]$. Если функция интегрируема на отрезке $[a,\ b]$, то единственное число, разделяющее эти множества, называют **определенным интегралом этой функции по отрезку** $[a,\ b]$ и обозначают символом $\int_a^b f(x)dx$.

Знак $\int_a^b$ читается: «интеграл от a до b»; числа a и b называются **соответственно нижним и верхним пределами интегрирования.**

Позднее мы установим связь между $\int f(x)dx$ и $\int_a^b f(x)dx$, которая сделает оправданным использование знака интеграла и в случае определенного интеграла.

Мы определили интеграл $\int_a^b f(x)dx$ для случая, когда $a < b$. Если $a > b$, то положим $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. Это определение естественно, так как при изменении направления промежутка интегрирования каждая разность $x_{k+1} - x_k$ изменяет знак, а тогда изменят знаки и суммы Дарбу и, следовательно, разделяющее их число, т. е. интеграл.

Так как при $a = b$ все Δx_k обращаются в нуль, то положим

$$\int_a^a f(x)dx = 0 .$$

Рассматривая в п. 1 задачу о площади криволинейной трапеции, мы получили, что площадь есть число, разделяющее площади вписанных и описанных ступенчатых фигур, а эти площади являются нижними и верхними суммами

Дарбу для заданной неотрицательной и непрерывной на отрезке $[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$ функции $y = f(x)$. Опираясь на интуицию, мы предположили, что это число единственно. Значит, $S = \int\limits_a^b f(x)dx$, т. е. определенный интеграл выражает площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$ $(a < b), y = 0$ и графиком непрерывной и неотрицательной на отрезке $[a,\ b]$ функции $y = f(x)$. В этом состоит геометрический смысл определенного интеграла.

Рассматривая в п. 2 задачу о массе стержня, мы получили, что масса есть число, разделяющее множества нижних и верхних сумм Дарбу для функции $\rho(\boldsymbol{x})$, задающей плотность стержня. По смыслу задачи это число единственно.

Значит, $\mu = \int\limits_a^b \rho(x)dx$, т. е. масса стержня есть интеграл от плотности. В этом состоит физический смысл определенного интеграла.

Пример 2. Приведем пример, показывающий, что существуют неинтегрируемые функции. Напомним, что функцией Дирихле называют функцию $D(x)$, определяемую на отрезке [0, 1] равенствами

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x - \text{рациональное число}, \\ 0, & \text{если} \quad x - \text{иррациональное число}. \end{cases}$$

Какой бы отрезок $[x_k,\ x_{k+1}]$ мы ни взяли, на нем найдутся как рациональные, так и иррациональные точки, т. е. точки, где $D(x) = 0$, и точки, где $D(x) = 1$. Поэтому для любого разбиения отрезка [0, 1] все значения m_k равны нулю, а все значения M_k равны единице. Тогда все нижние суммы Дарбу $s_T = \sum\limits_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k$ равны нулю, а все верхние суммы Дарбу $S_T = \sum\limits_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k$ равны единице, поскольку

$$s_T = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} 0 \cdot \Delta x_k = 0, \qquad S_T = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} 1 \cdot \Delta x_k = 1$$

а $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \Delta x_k$ длина отрезка [0, 1]. Итак, в рассматриваемом случае $\mathfrak{M} = \{0\}$, $\mathcal{N} = \{1\}$ и любое число из промежутка [0, 1] разделяет множества $\mathfrak{M}$ и $\mathcal{N}$.

Значит, функция Дирихле **не является интегрируемой на отрезке** $[0,\ 1]$.▲

Теорема 1 (необходимое и достаточное условие интегрируемости функции). Для того чтобы функция $y = f(x)$, определенная и ограниченная на отрезке, была интегрируема на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое разбиение T, что $S_T - s_T < \varepsilon$. Короче:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists T: \quad S_T - s_T < \varepsilon .$$

Доказательство следует из критерия единственности разделяющего числа и свойств 1° и 2° сумм Дарбу.

Поскольку

$$S_T - s_T = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k - \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k) \Delta x_k$$

условие $S_T - s_T < \varepsilon$ можно записать и так:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k) \Delta x_k < \varepsilon . \qquad (1)$$

Разность $M_k - m_k$, будем обозначать через ω_k и называть **колебанием функции** $f(x)$ на отрезке $[x_k,\ x_{k+1}]$. Тогда неравенство (1) можно записать следующим образом:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon .■$$

3.4. Классы интегрируемых функций

В предыдущем пункте мы ввели понятие интегрируемой функции и установили необходимое и достаточное условие интегрируемости. Ниже без доказательства приведем ряд теорем, которые выделяют **некоторые классы интегрируемых функций.**

Теорема 2. Если функция $\boldsymbol{f(x)}$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Замечание. В литературе по математическому анализу существует много вариантов доказательства теоремы 2. Например, теорему 2 можно доказать используя:

- теорему Кантора о равномерной непрерывности;
- понятие модуля непрерывности функции.

Упражнение

Доказать теорему 2, используя понятие модуля непрерывности функции. ►

Теорема 3. Если функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,\ b]$ и монотонна, то она интегрируема на этом отрезке.

Теорема 4. Если функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a,\ b]$ и непрерывна во всех точках этого отрезка, кроме конечного числа точек $c_k,\quad k=1,2,....,m$, то она интегрируема на этом отрезке.

Теорема 5. Если функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a,\ b]$, ограничена, интегрируема на отрезке $[a,\ \eta]$ при любом $\eta\in[a,\ b]$ и существует конечный

$$\lim_{\eta\to b-0}\left(\int_a^b f(x)dx\right)=A,$$

то она интегрируема на этом отрезке, причем

$$\int_a^b f(x)dx=A.$$

Пример 3. Показать, пользуясь определением интеграла и теоремой 2, что $\int_a^b dx=b-a$.

Решение

Функция $f(x)=1$ непрерывна на отрезке и в силу теоремы 2 интегрируема. Пусть $T=\{x_i,\ i=0,1,...,n\}$ - произвольное разбиение отрезка $[a,\ b]$. Так как $f(x)=1$, то для любого разбиения отрезка $[a,\ b]$ все значения m_k равны единице , а все значения M_k также равны единице. Тогда все нижние суммы Дарбу $s_T=\sum_{k=0}^{n-1}m_k\Delta x_k$ равны 1, а все верхние суммы Дарбу $S_T=\sum_{k=0}^{n-1}M_k\Delta x_k$ равны 1, поскольку

$$s_T=\sum_{k=0}^{n-1}m_k\Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1}1\cdot\Delta x_k=b-a,\qquad S_T=\sum_{k=0}^{n-1}M_k\Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1}1\cdot\Delta x_k=b-a$$

а $\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k$ длина отрезка $[a,\ b]$. Итак, в рассматриваемом случае $\mathrm{M}=\{b-a\}$, $\mathrm{N}=\{b-a\}$. Тогда

$$b-a=s_T=\sum_{k=0}^{n-1}m_k\Delta x_k\le I\le\sum_{k=0}^{n-1}M_k\Delta x_k=S_T=b-a,$$

и поэтому $I=\int_a^b dx=b-a$. ▲

Упражнение

Показать, пользуясь определением интеграла и теоремой 2, что $\int_a^b xdx=\dfrac{b^2-a^2}{2}$. ▶

3.5. Аддитивность определенного интеграла

Теорема 6. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a,\ c]$ и $[c,\ b]$, $a<c<b$, то она интегрируема и на отрезке $[a,\ b]$, причем выполняется равенство

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx \quad \text{(аддитивное свойство интеграла).} \qquad (2)$$

Доказательство. Возьмем произвольное число $\varepsilon>0$. Так как по условию функция интегрируема на отрезке $[a,\ c]$, то в силу теоремы 1 существует разбиение T_1 отрезка $[a,\ c]$ такое, что $S_{T_1}-s_{T_1}<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Аналогично функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[c,\ b]$ и, значит, существует разбиение T_2 отрезка $[c,\ b]$

такое, что $S_{T_2} - s_{T_2} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Эти разбиения T_1 и T_2 в совокупности образуют разбиение T отрезка $[a,\ b]$, причем

$$S_T - s_T = (S_{T_1} - S_{T_2}) - (s_{T_1} - s_{T_2}) = (S_{T_1} - s_{T_1}) + (S_{T_2} - s_{T_2}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Итак, для произвольного числа $\varepsilon > 0$ нам удалось построить разбиение $\boldsymbol{T}$ отрезка $[a,\ b]$, такое, что $S_T - s_T < \varepsilon$. Это означает, что функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,\ b]$.

Из неравенств $s_{T_1} \le \int\limits_a^c f(x)dx \le S_{T_1}$, $\quad s_{T_2} \le \int\limits_c^b f(x)dx \le S_{T_2}$ следует, что

$$s_T = s_{T_1} + s_{T_2} \le \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx \le S_{T_1} + S_{T_2} = S_T .$$

Таким образом, как $\int\limits_a^b f(x)dx$, так и $\int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$ разделяют множества $\{s_T\}$ и $\{S_T\}$ сумм Дарбу для отрезка $[a,\ b]$. Поскольку эти множества разделяются лишь одним числом, справедливость равенства (2) доказана. ■

Отметим, что если $b < c$, то

$$\int\limits_a^c f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx - \int\limits_c^b f(x)dx .$$

Значит, и в этом случае

$$\int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx .$$

Равенство (2) имеет наглядный геометрический смысл: оно выражает **свойство аддитивности площади плоской фигуры.** Так, площадь S криволинейной трапеции $aABb$ изображенной на рис.7, равна $S_1 + S_2$, где S_1 - площадь трапеции $aACc$, а S_2 -площадь трапеции $cCBb$. Но

$$S_1 = \int\limits_a^c f(x)dx, \qquad S_2 = \int\limits_c^b f(x)dx, \qquad S = \int\limits_a^b f(x)dx,$$

откуда следует равенство (2).

С физической точки зрения равенство (2) выражает **свойство аддитивности массы стержня.**

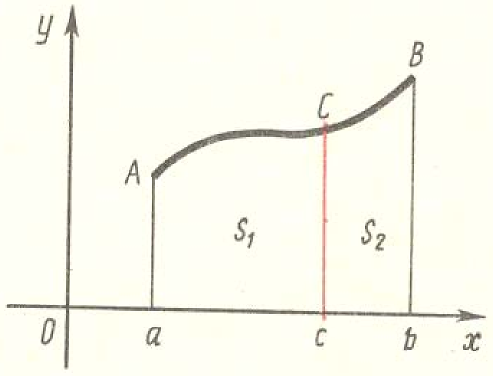

Рис. 7

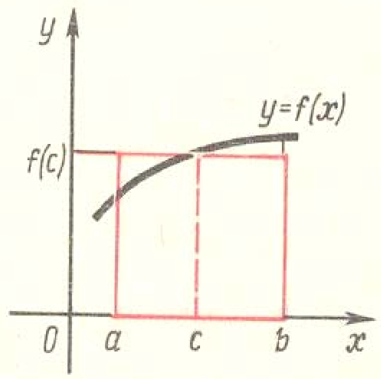

Рис.8

3.6. Теорема о среднем для определенного интеграла

Теорема 7 (о среднем). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, то существует точка $c \in [a,\ b]$, такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Число $f(c) = \dfrac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx$ называется средним значением функции f на отрезке $[a,\ b]$.

Геометрический смысл этой теоремы состоит в том, что **площадь криволинейной трапеции равна площади прямоугольника, имеющего то же основание, что и трапеция, причем высота прямоугольника равна ординате $f(c)$ в некоторой точке c, лежащей между a и b** (рис. 8).

На практике нередко исчисляются такого рода среднее значения, например, средняя производительность труда, средняя мощность электродвигателей и т.д.

Пример 4. Переменные издержки производства определяются формулой $y = 3x$, где x - количество произведенных единиц продукции. Рассчитать средние издержки производства, если объем производства составляет от 3 до 5 единиц.

Решение

Среднее значение функции есть $\frac{1}{5-3}\cdot\int_3^5 3xdx=\frac{3}{2}\int_3^5 xdx=12$. Поскольку $y=3x$, имеем:

$$12=3x_0\text{, откуда } x_0=4.$$

Средние издержки производства составляют 12. ▲

Упражнение

Найти среднее значение издержек $K(x)=3x^2+4x+1$, если объем продукции x меняется от 3 до 3 единиц, и указать объем продукции, при котором издержки принимают среднее значение. ►

3.7. Формула Ньютона-Лейбница

В этом пункте мы докажем основную формулу интегрального исчисления, устанавливающую связь между понятиями определенного интеграла и первообразной.

3.7.1. Существование первообразной у непрерывной функции. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,\ b]$, то она интегрируема по любой части этого отрезка и потому при любом $x\in[a,\ b]$ существует интеграл $\int_a^x f(x)dx$. Чтобы не смешивать обозначения верхнего предела и переменной интегрирования, будем записывать этот интеграл в виде $\int_a^x f(t)dt$. Рассмотрим функцию $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$. Докажем справедливость следующей теоремы.

Теорема 8. Если функция $\boldsymbol{f(x)}$ непрерывна на отрезке $[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$, то функция

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$$

дифференцируема в любой внутренней точке $\boldsymbol{x}$ этого отрезка, причем

$$\Phi'(x) = f(x).$$

Иными словами,

интеграл с переменным верхним пределом является одной из первообразных для непрерывной подынтегральной функции.

Доказательство. Найдем производную функцию

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Выберем Δx столь малым, чтобы точка $x+\Delta x$ лежала внутри отрезка $[a,\ b]$; тогда

$$\Phi(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Далее,

$$\Delta\Phi = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

(здесь было использовано аддитивное свойство интеграла).

Теперь к полученному интегралу применим теорему о среднем значении (см. теорему 7):

$$\Delta\Phi = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(c)\Delta x,$$

где $c \in [x,\ x+\Delta x]$ (или $c \in [x+\Delta x,\ x]$, если $\Delta x < 0$). Итак, $\Delta\Phi = f(c)\Delta x$, а $\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta x} = f(c)$.

Так как функция $f(x)$ непрерывна и $c \to x$ при $\Delta x \to 0$, то $\lim\limits_{c\to x} f(c) = f(x)$. Поэтому

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{c\to x} f(c) = f(x).\ \blacksquare$$

Следствие. Из доказанного утверждения вытекает, что если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, то она имеет на этом отрезке первообразную, а именно функцию Φ, где $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$, и поэтому

$$\int f(x)dx=\int\limits_a^x f(t)dt+C, \qquad a\le x\le b,$$

где $\boldsymbol{C}$ - произвольная постоянная.

Поэтому доказанная теорема называется **теоремой о существовании первообразной для непрерывной функции.**

3.7.2. Основная формула интегрального исчисления (формула Ньютона - Лейбница).

Теорема 9. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a), \tag{3}$$

где $\boldsymbol{F(x)}$ - первообразная для функции $f(x)$.

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, то она интегрируема на нем и, значит, существует $\int\limits_a^b f(x)dx$. Далее, в силу непрерывности функции $f(x)$ на $[a,\ b]$, на этом отрезке существует ее первообразная.

Согласно теореме 8, функция $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ является одной из первообразных для функции $f(x)$; следовательно, для любой первообразной $F(x)$ имеем

$$\Phi(x)=F(x)+C. \tag{4}$$

Заметим, что $\Phi(a)=\int\limits_a^a f(t)dt=0$. Из равенства (4) заключаем, что

$\Phi(a)=F(a)+C$, т. е. $0=F(a)+C$; значит, $C=-F(a)$. Итак,

$$\Phi(x)=F(x)-F(a),$$

в частности,

$$\Phi(b)=F(b)-F(a). \text{ Но } \Phi(b)=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(x)dx.$$

Итак,

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a). \blacksquare$$

Равенство (3) называется **формулой Ньютона – Лейбница.** Разность $F(b)-F(a)$ записывают в виде $F(x)\big|_a^b$; тогда $\int_a^b f(x)dx = F(x)\big|_a^b$.

Пример 5. Функция $\frac{x^3}{3}$ - одна из первообразных для функции x^2. Поэтому $\int_a^b x^2dx=\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_a^b=\frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}=\frac{b^3-a^3}{3}$. ▲

3.7.3. Свойства определенного интеграла. Из формулы Ньютона - Лейбница легко выводятся основные свойства определенного интеграла. Во всех этих свойствах предполагается, что функции непрерывны на рассматриваемых промежутках.

1°. Интеграл от суммы двух функций $f_1(x)$ и $\boldsymbol{f_2(x)}$ по отрезку $[a,\ b]$ равен сумме интегралов от этих функций по тому же отрезку:

$$\int_a^b (f_1(x)+f_2(x))dx=\int_a^b f_1(x)dx+\int_a^b f_2(x)dx.$$

Доказательство. Из свойств неопределенного интеграла вытекает, что если $F_1(x)$ - первообразная для $f_1(x)$, а $F_2(x)$ - первообразная для $f_2(x)$, то первообразной для $f_1(x)+f_2(x)$ служит функция $F_1(x)+F_2(x)$. Поэтому

$$\int_a^b (f_1(x)+f_2(x))dx=(F_1(b)+F_2(b))-(F_1(a)+F_2(a))=$$

$$=(F_1(b)-F_1(a))+(F_2(b)-F_2(a))=\int_a^b f_1(x)dx+\int_a^b f_2(x)dx. \blacksquare$$

Аналогично доказывается следующее свойство.

2°. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx.$$

Пример 6. Вычислить $\int_{-2}^{1}(2x^3+3x-4)dx$.

Решение

Имеем

$$\int_{-2}^{1}(2x^3+3x-4)dx = \int_{-2}^{1}2x^3dx + \int_{-2}^{1}3xdx + \int_{-2}^{1}(-4)dx = 3\int_{-2}^{1}x^3dx + 3\int_{-2}^{1}xdx - 4\int_{-2}^{1}dx =$$

$$= 2\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^{1} + 3\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{1} - 4\cdot x\Big|_{-2}^{1} =$$

$$= \frac{1}{2}\left((1^4-(-2)^4) + \frac{3}{2}(1^2-(-2)^2) - 4(1-(-2)\right) = -24. \blacktriangle$$

3°. Если $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a,\ b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0. \qquad (5)$$

Доказательство. В самом деле, если $f(x) \geq 0$, то $s_T \geq 0$, а тогда тем более $\int_a^b f(x)dx \geq 0$. ■

Неравенство (5) допускает простое геометрическое истолкование:

площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции, принимающей только неотрицательные значения, есть неотрицательное число.

4°. Если на отрезке $[a,\ b]$ выполняется неравенство $f(x) \leq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx. \qquad (6)$$

Доказательство. В самом деле, $g(x) - f(x) \geq 0$, а тогда согласно свойству 3° имеем $\int_a^b (g(x)-f(x))dx \ge 0$), т.е. $\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \ge 0$, откуда и следует неравенство (6). ■

Геометрический смысл неравенства (6) рекомендуем выяснить самостоятельно.

3.7.4. Интегрирование по частям в определенном интеграле. Для определенного интеграла формула интегрирования по частям принимает следующий вид:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du . \qquad (7)$$

В самом деле, если $\int u dv = F(x) + C_1$, $\int v du = \Phi(x) + C_2$ то применяя формулу интегрирования по частям для неопределенного интеграла имеем $\int u dv = uv - \int v du$, т. е.

$$F(x) = u(x)v(x) - \Phi(x) + C .$$

Поэтому $F(b) = u(b)v(b) - \Phi(b) + C$ и $F(a) = u(a)v(a) - \Phi(a) + C$. Значит,

$$F(b) - F(a) = (u(b)v(b) - u(a)v(a)) - (\Phi(b) - \Phi(a)),$$

а это и есть формула (7).

Пример 7. Вычислить $\int_1^2 xe^x dx$.

Решение. Положим $u = x,\ \ dv = e^x dx$. Тогда $du = dx,\ \ v = e^x$. Используя формулу (7), получим

$$\int_1^2 xe^x dx = xe^x\Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx = 2\cdot e^2 - 1\cdot e^1 - e^x\Big|_1^2 = 2e^2 - e - (e^2 - e) = e^2 .$$

Упражнение

Показать, что для любых $m \in N$, $n \in N$ справедливы равенства

а) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx dx = 0$; б) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi$. ▶

3.7.5. Замена переменной в определенном интеграле. Пусть $F(x)$ является первообразной для $f(x)$ на отрезке $[a,\ b]$ и пусть $x=\varphi(t)$ - дифференцируемая функция, отображающая отрезок $[\alpha,\ \beta]$ в отрезок $[a,\ b]$, причем $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$. Ранее мы установили, что

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(\varphi(t))+C.$$

Значит,

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(\varphi(t))\Big|_{\alpha}^{\beta}=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=F(b)-F(a)=\int\limits_{a}^{b} f(x)dx.$$

Итак, мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 10. Пусть функция $y=f(x)$ имеет первообразную на отрезке $[a,\ b]$, а функция $x=\varphi(t)$ определена на отрезке $[\alpha,\ \beta]$ и дифференцируема внутри этого отрезка, причем $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ и $\varphi([\alpha,\ \beta])=[a,\ b]$. Тогда

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (8)$$

На этом утверждении и основан метод замены переменной под знаком определенного интеграла. Заметим, что на практике формула (8) используется как «слева направо», так и «справа налево».

Условие $\varphi([\alpha,\ \beta])=[a,\ b]$ заведомо выполняется, если функция $x=\varphi(t)$ монотонна на отрезке $[\alpha,\ \beta]$. Это имеет место, если ее производная сохраняет знак на $[\alpha,\ \beta]$.

Пример 8. Вычислить $\int\limits_{0}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

Решение

Воспользуемся тригонометрической подстановкой $x=\varphi(t)=a\sin t$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$. Найдем пределы интегрирования α и β для новой переменной $\boldsymbol{t}$.

Функция $\varphi(t)=a\sin t$ на отрезке $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ определена и дифференцируема внутри него, причем $\varphi(0)=0$, $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=a$ и $\varphi\left(\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]\right)=[0,\ a]$. Значит, можно применить формулу (8). Имеем

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \cos^2 t} \cdot a\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t \cdot a\cos t dt = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt =$$

$$= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt = \frac{a^2}{2} t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{a^2}{2} \frac{\sin 2t}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) + \frac{a^2}{4}(\sin\pi - \sin 0) = \frac{\pi a^2}{4}. \ \blacktriangle$$

Упражнение

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, \ -a]$. Показать, что:

а) если f - нечетная функция, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$;

б) если f - четная функция, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$. ►

Пример 9. Вычислить $\int_{0,5}^{1,5} \frac{dx}{4x^2 - 4x + 5}$.

Решение

Так как $4x^2 - 4x + 5 = (2x-1)^2 + 4$. Положим $u = 2x - 1$; тогда $du = 2dx$. Если $x = 0{,}5$, то $u = 2x - 1 = 2 \cdot 0{,}5 - 1 = 0$; если $x = 1{,}5$, то $u = 2x - 1 = 2 \cdot 1{,}5 - 1 = 2$. Таким образом, 0 и 2 - новые пределы интегрирования. Функция $u = 2x - 1$ на отрезке $[0{,}5, \ 1{,}5]$ определена, дифференцируема и монотонно возрастает; значит, можно воспользоваться формулой (8) (но если в предыдущем примере мы использовали эту формулу «слева направо», то теперь будем идти «справа налево»). Получаем

$$\int_{0,5}^{1,5} \frac{dx}{4x^2 - 4x + 5} = \int_{0,5}^{1,5} \frac{2dx}{(2x-1)^2 + 4} = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{du}{u^2 + 4} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} arctg\left(\frac{u}{2}\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{4}(arctg1 - arctg0) = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{16}. \ \blacktriangle$$

Упражнение

Показать, что если f - непрерывна на отрезке R^1 периодическая с периодом T функция, то для любого $\alpha \in R^1$ справедливо равенство

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^T f(x)dx. \ ►$$

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение первообразной для функции на интервале.

2. Дайте определение первообразной на отрезке. Можно ли ввести понятие первообразной и для других промежутков (полуинтервала - конечного или бесконечного)?

3. Приведите примеры функций, имеющих первообразные.

4. Приведите примеры двух различных первообразных для одной и той же функции.

5. Если $F(x)$- первообразная для функции $f(x)$ на интервале $(a,\ b)$, то что можно сказать о функции $F(x)+C$?

6. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - две первообразные для функции $f(x)$ на интервале $(a,\ b)$, то как они связаны между собой?

7. Разъясните тот факт, что, для данной функции $f(x)$ ее первообразная $F(x)$ определяется неоднозначно, с точностью до постоянной. Что нужно сделать, для того чтобы из совокупности первообразных выделить какую-либо первообразную?

8. Всякая ли функция имеет первообразную?

9. Вопрос о существовании первообразной для функции существенно связан с тем промежутком, на котором эта функция рассматривается. Разъясните это с помощью примера.

10. Для каких функций существует первообразная?

11. Что называют неопределенным интегралом от функции f на этом промежутке? Каким символом обозначают неопределенный интеграл и что пишут в этом случае?

12. Что называют подынтегральной функцией? А - подынтегральным выражением? Приведите возможные виды записей подынтегрального выражения.

13. Какую операцию называют операцией интегрированием? Какой операции это операция является обратной?

14. На основе какого факта по таблице производных можно найти интегралы от некоторых элементарных функций, т.е. составить таблицу основных интегралов?

15. Приведите свойства неопределенного интеграла.

16. На каком правиле дифференцирования основан метод замены переменной, который является одним из мощных методов интегрирования? Поясните суть этого метода.

17. Какую формулу называют формулой интегрирования заменой переменного? Приведите некоторые важные частные случаи этой формулы.

18. Какую формулу называют формулой интегрирования подстановкой? Разъясните условия применения этой формулы для вычисления интегралов.

19. Какое правило дифференцирование используется при выводе формулы интегрирования по частям? Приведите формулу интегрирования по частям.

20. Что дает методы замены переменного и интегрирования по частям в плане расширения таблицы основных интегралов, т.е. в плане дальнейшего расширения множества функций, интегралы от которых выражаются через элементарные функции?

21. В чем заключается сущность метода неопределенных коэффициентов? Для вычисления каких интегралов целесообразно применять этот метод?

22. Напишите линейную комбинацию $\sin\beta x$ и $\cos\beta x$ с неопределенными коэффициентами.

23. Напишите общий вид многочлена пятой степени с неопределенными коэффициентами.

24. Приведите примеры простейших рациональных функций вида 1) – 4)

25. Какая рациональная функция называется правильной дробью? Какая рациональная функция называется неправильной дробью?

26. В каком случае разложение правильной дроби на простейшие будет содержать лишь дроби 1-го рода?

27. В каком случае разложение правильной дроби на простейшие будет содержать и дроби 2-го рода?

28. В каком случае приходится применять конкретную формулу при интегрировании рациональных функций? Какой вид имеет эта формула.

29. К какой задаче сводится отыскание коэффициентов при разложении правильной дроби на простейшие?

30. Сформулируйте алгоритм интегрирования рациональных функций.

31. Почему подстановку $tg\frac{x}{2}=z$ называют универсальной?

32. Какими свойствами должна обладать подынтегральная функция, чтобы целесообразно было пользоваться другими тригонометрическими подстановками?

33. Какую фигуру на плоскости называют криволинейной трапецией? Как найти площадь такой фигуры? Что означает разбиение T отрезка $[a,\ b]$? Очевидно, что для любого разбиения T выполняется неравенство $s_T \le S \le S_T$, где $\boldsymbol{S}$ - искомая площадь криволинейной трапеции. Как можно определить эту площадь?

34. Как на практике делят отрезок $[a,\ b]$? При этом какую запись используют вместо s_T и S_T соответственно? Как можно определить искомую площадь в этом случае? Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y=x^2$ и прямыми $x=0$, $x=1$, $y=0$.

35. Найти массу материальной плоской пластины - стержня как число, разделяющее множества $\{s_T\}$ и $\{S_T\}$ для всевозможных разбиений T отрезка $[a,\ b]$.

36. Что называется нижней суммой Дарбу? Что называется верхней суммой Дарбу? Какими свойствами обладают эти суммы?

37. Когда функция, ограниченная на отрезке $[a,\ b]$, называется интегрируемой на этом отрезке? Что называется определенным интегралом заданной

функции по отрезку $[a,\ b]$ и как его обозначают?

38. Обычно интеграл $\int_a^b f(x)dx$ определяют для случая, когда $a < b$. Как определяют интеграл $\int_a^b f(x)dx$ когда $a > b$?

39. Интегрируемые ли любые функции? Если «нет», то приведите пример, неинтегрируемой функции.

40. Что является необходимым и достаточным условием интегрируемости функции? Сформулируйте теорему.

41. Приведите теоремы, которые выделяют некоторые классы интегрируемых функций.

42. Что означает аддитивное свойство определенного интеграла? Сформулируйте теорему.

43. Что означает свойство аддитивности площади плоской фигуры, свойство аддитивности массы стержня.

44. Сформулируйте теорему о среднем для определенного интеграла. Что называется средним значением функции на отрезке $[a,\ b]$? В чем заключается геометрический смысл этой теоремы?

45. Сформулируйте теорему о существования первообразной для непрерывной функции.

46. Показать, что интеграл с переменным верхним пределом является одной из первообразных для непрерывной подынтегральной функции.

47. Выведите основную формулу интегрального исчисления - формулу Ньютона – Лейбница.

48.Приведите свойства определенного интеграла.

49. Какой вид принимает формула интегрирования по частям для определенного интеграла?

50. Приведите утверждения, на котором основан метод замены переменной под знаком определенного интеграла.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hoy M., Livernois J., McKenna Ch., Rees R., Stengos T. **Mathematics for Economics.** Second edition. The MIT Press: Cambridge, Massachusetts; London, England. 2001. - 1130 p. **(701 - 733)**

2. Бабаджанов Ш.Ш. **Высшая математика. Часть II**. Учебное пособие. Т.: «IQTISOD MOLIYA», 2015. – 420 с.

3. Малыхин В.И. **Высшая математика.** Учебное пособие. 2- е изд., пере-раб. и доп. М.: ИНФРА-М, 2009. - 365 с.